Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

Arătați că oricare ar fi numerele naturale nenule x, y, z fracția

$$N=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{25^y+23^{2z+1}}$$

se poate simplifica cu un număr natural mai mare decât 20.

Subiectul 2.

Determinați numerele naturale prime a, b, c, distincte două câte două, pentru care are loc egalitatea

$$2a+6b+9c=11^2.$$

Subiectul 3.

Pe dreapta d se consideră punctele A, O și C, în această ordine. Fie $\sphericalangle AOB$ un unghi ascuțit, iar $[OD$ și $[OE$ sunt două semidrepte situate de aceeași parte a dreptei d astfel încât unghiurile $\sphericalangle AOD$, respectiv $\sphericalangle BOE$ să fie unghiuri drepte, iar semidreapta $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOE$. Știind că

$$m(\sphericalangle COE)=4\cdot m(\sphericalangle AOB),$$

determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle FOD$.

Notă:

1) Timp de lucru 2 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
Barem
CLASA a VI-a

Subiectul 1.
Arătați că oricare ar fi numerele naturale nenule x, y, z fracția

$$N = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{25^y + 23^{2z+1}}$$

se poate simplifica cu un număr natural mai mare decât 20.
Soluţie:
Pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ numărul $x(x+1)(x+2)(x+3)$ este divizibil cu 24 **3p**
Pentru orice $y \in \mathbb{N}^*$ există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $25^y = (24+1)^y = 24 \cdot m + 1$..........................**1p**
Pentru orice $z \in \mathbb{N}^*$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $23^{2z+1} = (24-1)^{2z+1} = 24 \cdot n - 1$ **1p**
Pentru orice $y, z \in \mathbb{N}^*$ numărul $25^y + 23^{2z+1}$ este divizibil cu 24 **1p**
Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ fracția N se poate simplifica cu $24 > 20$ **1p**

Subiectul 2.
Determinați numerele naturale prime a, b, c, distincte două câte două, pentru care are loc egalitatea

$$2a + 6b + 9c = 11^2.$$

Soluţie:
c impar, cu $c \in \{3,5,7,11\}$ **1p**
Pentru $c = 11$, $a + 3b = 11$, cu soluțiile $(a,b,c,) \in \{(2,3,11),(5,2,11)\}$ **1p**
Pentru $c = 7$, $a + 3b = 29$, cu soluțiile $(a,b,c,) \in \{(23,2,7)\}$ **0,5p**
Pentru $c = 5$, $a + 3b = 38$, deci a, b sunt impare
a, b nu pot fi amândouă de forma $4k+1$, respectiv $4k+3$ **0,5p**
Dacă $a = 4k+1$ și $b = 4p+3$ se obține $k + 3p = 7$ **0,5p**
Pentru $k = 1, p = 2$ se obține $b = 11$ și $a = c = 5$ nu convine
Pentru $k = 4, p = 1$ se obține $a = 17$, $b = 7$
Pentru $k = 7, p = 0$ se obține $a = 29$, $b = 3$
Se obțin soluțiile $(a,b,c,) \in \{(17,7,5),(29,3,5)\}$ **1p**
Dacă $a = 4k+3$ și $b = 4p+1$ se obține $k + 3p = 8$ **0,5p**
Pentru $k = 8, p = 0$ se obține $b = 1$ și $a = 35$ nu convine
Pentru $k = 5, p = 1$ se obține $a = 23$, $b = c = 5$
Pentru $k = 2, p = 2$ se obține $a = 11$, $b = 9$ nu e prim
Nu se obțin soluții.
Pentru $c = 3$, $a + 3b = 47$, **0,5p**
Pentru $a = 2$ se obține $b = 15$ care nu e prim
Pentru $b = 2$ se obține $a = 41$
Deci soluția este $(a,b,c,) \in \{(41,2,3)\}$ **0,5p**

Soluțiile sunt $(a,b,c,) \in \{(2,3,11),(5,2,11),(23,2,7),(17,7,5),(29,3,5),(41,2,3)\}$ **1p**
Pentru orice altă metodă de rezolvare corectă se acordă 1 punct pentru fiecare triplet corect obținut și 1 punct pentru finalizare!

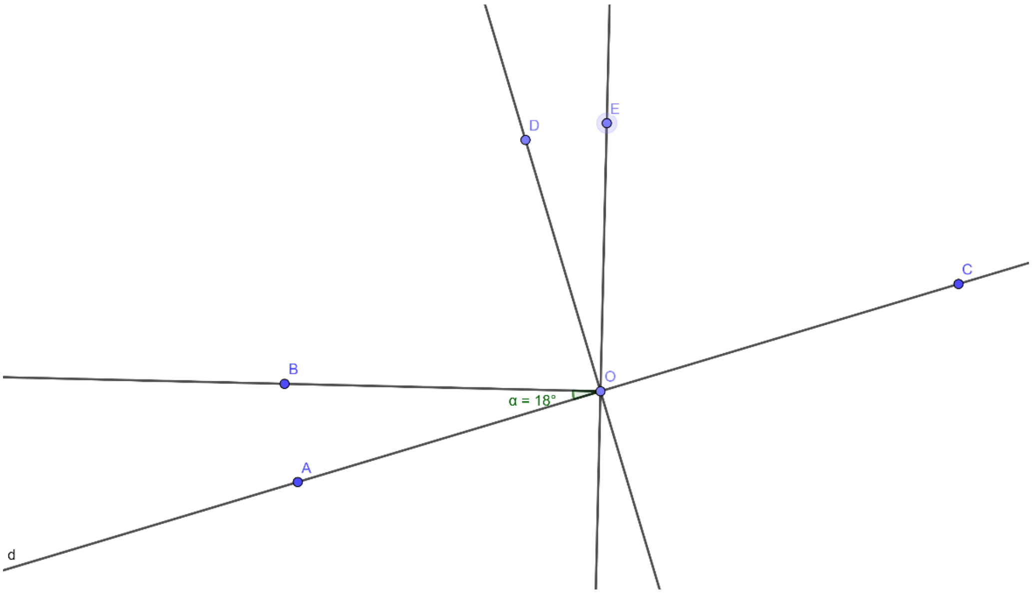
Subiectul 3. Pe dreapta d se consideră punctele A, O și C, în această ordine. Fie $\sphericalangle AOB$ un unghi ascuțit, iar $[OD$ și $[OE$ sunt două semidrepte situate de aceeași parte a dreptei d astfel încât unghiurile $\sphericalangle AOD$, respectiv $\sphericalangle BOE$ să fie unghiuri drepte, iar semidreapta $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOE$. Știind că

$$m(\sphericalangle COE) = 4 \cdot m(\sphericalangle AOB),$$

determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle FOD$.

Soluţie: Notăm $x = m(\sphericalangle AOB)$

Cazul 1. Semidreptele $[OB$, $[OD$ și $[OE$ sunt situate de aceeași parte a dreptei d



Se acordă **0,5 puncte** pentru realizarea figurii

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COE) = 180° - m(\sphericalangle BOE) = 90°$ **0,5p**

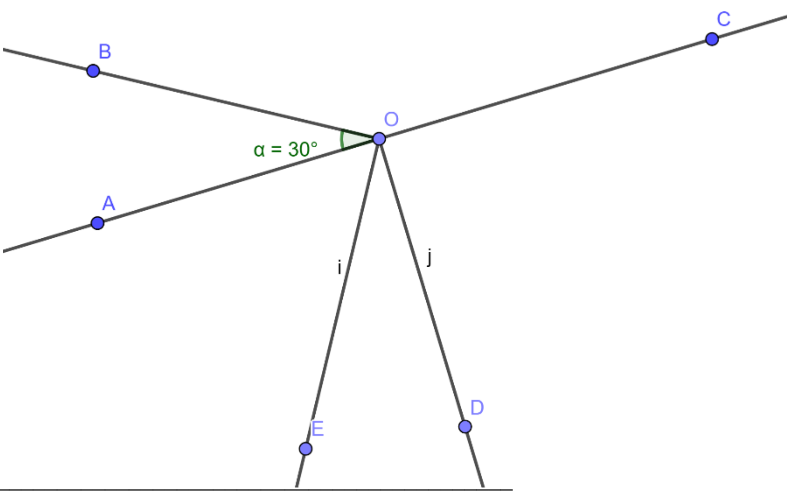
$5x = 90^{\circ}$ **0,5p**

$m(\sphericalangle AOB) = 18°$ **1p**

$m(\sphericalangle AOE) = 180° - 4x = 108°$

$m(\sphericalangle FOD) = 90° - \frac{1}{2} m(\sphericalangle AOE) = 36°$ **1p**

Cazul 2. Semidreptele $[OD$ și $[OE$ sunt situate de aceeași parte a dreptei d în alt semiplan decât semidreapta $[OB$.



Se acordă **0,5 puncte** pentru realizarea figurii

$m(\sphericalangle AOE) = 90^\circ - x$ **0,5 pct**

$m(\sphericalangle AOE) + m(\sphericalangle COE) = 180^\circ$

$3x = 90$ **0,5 pct**

$m(\sphericalangle AOB) = 30^\circ$ **1 punct**

$m(\sphericalangle AOE) = 90^\circ - x = 60^\circ$

$m(\sphericalangle FOD) = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\sphericalangle AOE) = 30^\circ$ **1 punct**